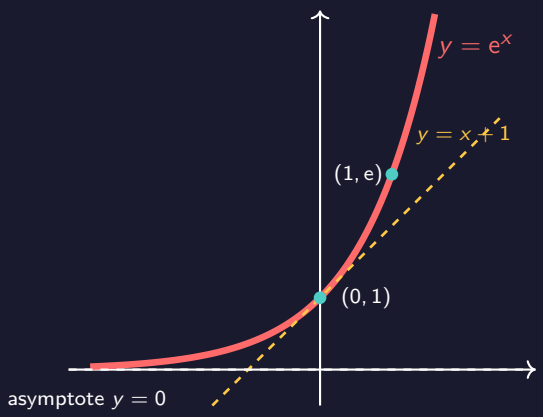
FICHE 10

Fonction exponentielle

Définition & propriétés ▪ Équations & inéquations ▪ Croissances comparées



Terminale — Spécialité Mathématiques — Programme officiel

Table des matières

1 Pourquoi étudier l'exponentielle ? 3
- 1.1 Le problème fondamental . . . 3
- 1.2 L'idée directrice . . . 3

2 L'idée avant la formule 4
- 2.1 La fonction qui est sa propre dérivée . . . 4
- 2.2 La croissance exponentielle au quotidien . . . 4
- 2.3 Sommes → produits . . . 4
- 2.4 Graphiquement . . . 5

3 Le cours formel 6
- 3.1 Existence et unicité . . . 6
- 3.2 Le nombre e . . . 6
- 3.3 Relation fonctionnelle . . . 7
- 3.4 Signe et position par rapport à 1 . . . 8
- 3.5 Étude complète de la fonction exponentielle . . . 8
- 3.6 Limites de référence . . . 10
- 3.7 Croissances comparées . . . 10
- 3.8 Dérivée de e^u . . . 11
- 3.9 Équations et inéquations avec l'exponentielle . . . 12
- 3.10 Fonctions a^x et exponentielle de base a . . . 13
- 3.11 Équations différentielles $y' = ay$ . . . 13

4 Boîte à outils — Réflexes pour le bac 15

5 Exercices 17

6 Problème — *L'exponentielle par les séries* ⭐⭐⭐ 20

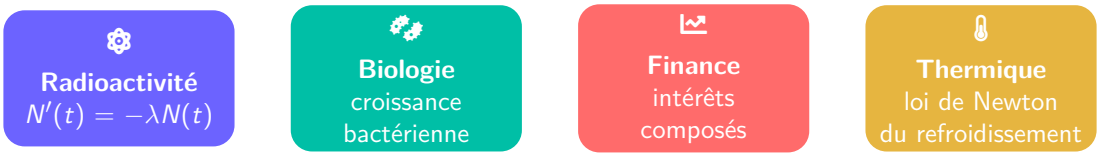
7 Corrigés détaillés 21

« L'exponentielle est sa propre dérivée : la plus belle propriété de l'analyse. »

1 Pourquoi étudier l'exponentielle ?

1.1 Le problème fondamental

Quelle fonction vérifie $f' = f$? Plus précisément : existe-t-il une fonction égale à sa propre dérivée ? Cette question, *a priori* très abstraite, surgit naturellement dès qu'on modélise la réalité.



En physique : la décroissance radioactive obéit à $N'(t) = -\lambda N(t)$, dont la solution est $N(t) = N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$. Le carbone 14 ($\lambda \approx 1{,}21 \times 10^{-4}\,\text{an}^{-1}$) permet de dater des fossiles jusqu'à 50 000 ans.

En biologie : une population de bactéries double toutes les 20 minutes. Après t minutes : $N(t) = N_0 \cdot 2^{t/20} = N_0\,\mathrm{e}^{t\ln 2/20}$.

En finance : un capital C_0 placé au taux annuel r avec intérêts composés continus vaut $C(t) = C_0\,\mathrm{e}^{rt}$ après t années.

En thermique : la loi de Newton donne $T(t) - T_{\text{amb}} = (T_0 - T_{\text{amb}})\,\mathrm{e}^{-kt}$: le café refroidit exponentiellement.

1.2 L'idée directrice

L'idée directrice :

L'exponentielle est l'**unique fonction** égale à sa propre dérivée et valant 1 en 0. Elle transforme les **sommes en produits**, croît plus vite que tout polynôme, et modélise tout phénomène de **croissance ou décroissance proportionnelle**.

« L'exponentielle est sa propre dérivée : la plus belle propriété de l'analyse. »

2 L'idée avant la formule

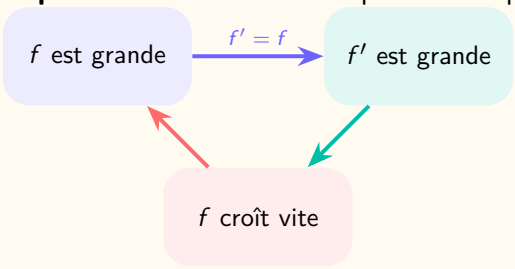
2.1 La fonction qui est sa propre dérivée

Intuition | Le cercle magique

Imagine une fonction dont la **vitesse de variation** est égale à la fonction elle-même :

$$f'(x) = f(x)$$

Quand f est grande, elle croît vite $\rightarrow$ elle devient encore plus grande $\rightarrow$ elle croît encore plus vite...C'est l'**emballement exponentiel**. Le seul frein : quand f est proche de 0, elle varie peu.



2.2 La croissance exponentielle au quotidien

Intuition | L'échiquier de Sissa

Légende : Sissa demande 1 grain de blé sur la 1re case, 2 sur la 2e, 4 sur la 3e...2^{63} sur la 64e. Total : $2^{64}-1 \approx 1{,}8\times10^{19}$ grains $\approx$ 700 milliards de tonnes. Plus que toute la production mondiale cumulée.
Morale : la croissance exponentielle dépasse très vite toute intuition linéaire. C'est ce que formalisent les **croissances comparées**.

2.3 Sommes $\rightarrow$ produits

Intuition | La propriété fondamentale

L'exponentielle « transforme les sommes en produits » :

$$e^{a+b} = e^a \times e^b$$

C'est la propriété **symétrique** de celle du logarithme ($\ln(ab) = \ln a + \ln b$). L'une est la réciproque de l'autre.

Conséquences immédiates :

- Soustraire $\rightarrow$ diviser : $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
- Multiplier $\rightarrow$ puissance : $e^{na} = (e^a)^n$
- Opposé $\rightarrow$ inverse : $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$

2.4 Graphiquement

Intuition | Lire la courbe de e^x

Quelques repères utiles :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
e^x	$\approx 0{,}05$	$\approx 0{,}14$	$\approx 0{,}37$	1	$\approx 2{,}72$	$\approx 7{,}39$	$\approx 20{,}1$

- La courbe passe par $(0, 1)$ et $(1, e)$.
- Tangente en $(0, 1)$: $y = x + 1$ (pente $= e^0 = 1$).
- Asymptote horizontale $y = 0$ en $-\infty$: la courbe « colle » à l'axe des x à gauche.
- En $+\infty$: explosion verticale.
- La courbe est toujours **au-dessus** de sa tangente en 0 ($e^x \geqslant x + 1$).

3 Le cours formel

3.1 Existence et unicité

Théorème | Théorème fondamental (admis)

Il existe une **unique** fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\boxed{f' = f \quad \text{et} \quad f(0) = 1}$$

Cette fonction est appelée **fonction exponentielle**, notée exp ou $x \mapsto \mathrm{e}^x$.

Attention | Pourquoi la condition $f(0) = 1$?

Sans elle, $g = 0$ (la fonction nulle) conviendrait aussi ($g' = 0 = g$). Plus généralement, si $f' = f$ et $f(0) = C$, alors $f(x) = C\mathrm{e}^x$. La condition $f(0) = 1$ sélectionne la « bonne » fonction.

Propriété | Conséquences immédiates du théorème

1. $\mathrm{e}^0 = 1$ (condition initiale).
2. $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$ (l'exponentielle est sa propre dérivée).
3. $\mathrm{e}^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (la fonction ne s'annule jamais).

Démonstration | De $\mathrm{e}^x > 0$

Posons $g(x) = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{-x}$. Alors $g'(x) = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x \cdot (-\mathrm{e}^{-x}) = 0$. Donc g est constante : $g(x) = g(0) = \mathrm{e}^0 \cdot \mathrm{e}^0 = 1$. Ainsi $\mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{-x} = 1$ pour tout x, ce qui prouve que $\mathrm{e}^x \neq 0$ pour tout x (et même que $\mathrm{e}^x = \frac{1}{\mathrm{e}^{-x}} > 0$ si l'on sait que e^x est à valeurs réelles).

3.2 Le nombre e

Définition | Le nombre e

On définit le nombre e comme la valeur de la fonction exponentielle en 1 :

$$\mathrm{e} = \exp(1) \approx 2{,}718\,281\,828\,459\ldots$$

e est un nombre **irrationnel** (et même **transcendant** : il n'est racine d'aucun polynôme à coefficients entiers).

Propriété | Approcher e

1. $\mathrm{e} = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ (intérêts composés)
2. $\mathrm{e} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{k!} = 1 + 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{24} + \cdots$ (série entière)

« L'exponentielle est sa propre dérivée : la plus belle propriété de l'analyse. »

3. $2{,}718 < e < 2{,}719$

Exemple | Intérêts composés

Tu places 1 000 à 100% par an. Si les intérêts sont versés :

— 1 fois/an : $1000 \times 2 = 2000$

— 12 fois/an : $1000 \times (1 + \frac{1}{12})^{12} \approx 2613$

— En continu ($n \to \infty$) : $1000 \times e \approx 2718$

C'est l'origine historique de e (Jacob Bernoulli, 1683).

3.3 Relation fonctionnelle

Théorème | Propriété fondamentale

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{e^{a+b} = e^a \times e^b}$$

L'exponentielle **transforme les sommes en produits**.

Démonstration | Exigible au bac

Fixons $a \in \mathbb{R}$ et posons $g(x) = e^{a+x} \cdot e^{-x}$.
$g'(x) = e^{a+x} \cdot e^{-x} + e^{a+x} \cdot (-e^{-x}) = e^{a+x} \cdot e^{-x} - e^{a+x} \cdot e^{-x} = 0$.
Donc g est constante : $g(x) = g(0) = e^a \cdot e^0 = e^a$.
En particulier pour $x = b$: $e^{a+b} \cdot e^{-b} = e^a$, d'où $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$.

Propriété | Propriétés algébriques complètes

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$:

1. $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$ (somme → produit)
2. $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$ (opposé → inverse)
3. $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$ (différence → quotient)
4. $(e^a)^n = e^{na}$ (puissance)
5. $\sqrt{e^a} = e^{a/2}$ (racine → moitié de l'exposant)

Démonstration | Des propriétés 2 à 5

2. $e^a \cdot e^{-a} = e^{a+(-a)} = e^0 = 1$, donc $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$.
3. $e^{a-b} = e^{a+(-b)} = e^a \cdot e^{-b} = \frac{e^a}{e^b}$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$: $(e^a)^n = \underbrace{e^a \cdot e^a \cdots e^a}_{n} = e^{a+a+\cdots+a} = e^{na}$. Pour $n = 0$: $(e^a)^0 = 1 = e^0$. Pour $n < 0$: $(e^a)^n = \frac{1}{(e^a)^{-n}} = \frac{1}{e^{-na}} = e^{na}$.

« L'exponentielle est sa propre dérivée : la plus belle propriété de l'analyse. »

5. $(e^{a/2})^2 = e^{2\cdot a/2} = e^a$, donc $e^{a/2} = \sqrt{e^a}$ (car $e^{a/2} > 0$).

Exemple | Simplifications types

1. $e^3 \cdot e^{-1} = e^{3-1} = e^2$.
2. $\dfrac{e^{5x}}{e^{2x}} = e^{5x-2x} = e^{3x}$.
3. $(e^{2x})^3 = e^{6x}$.
4. $e^x \cdot e^x = e^{2x}$ (**attention :** $e^x \cdot e^x \neq e^{x^2}$!).
5. $\dfrac{1}{e^{-3}} = e^3$.
6. $\sqrt{e^{2x+1}} = e^{(2x+1)/2} = e^{x+1/2}$.

Attention | Erreurs fréquentes sur l'exponentielle

— $e^{a+b} \neq e^a + e^b$ (c'est un **produit**, pas une somme !)
— $e^a \cdot e^b \neq e^{ab}$ (le produit des exposants → somme, pas produit)
— $(e^a)^b = e^{ab}$, **mais** $e^{(a^b)} \neq (e^a)^b$ en général
— $(e^x)^2 = e^{2x}$, **mais** $e^{x^2} \neq (e^x)^2$
— e^x n'est **jamais** négatif ni nul : $e^x > 0$ toujours

3.4 Signe et position par rapport à 1

Propriété | Signe de $e^x - 1$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
— $e^x < 1$ si $x < 0$
— $e^x = 1$ si $x = 0$
— $e^x > 1$ si $x > 0$

Démonstration

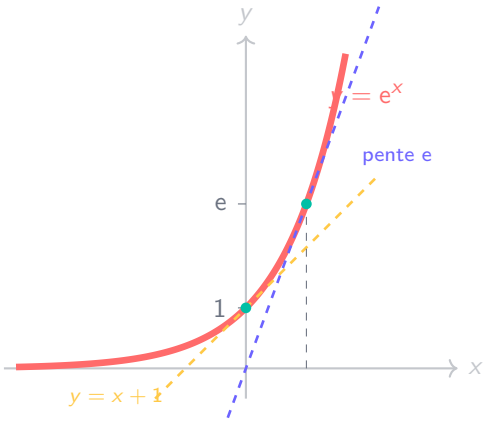
e^x est strictement croissante (car $(e^x)' = e^x > 0$) et $e^0 = 1$. Donc $x < 0 \Rightarrow e^x < e^0 = 1$, etc.

3.5 Étude complète de la fonction exponentielle

Propriété | Variations et tableau complet

exp est dérivable sur $\mathbb{R}$, $(e^x)' = e^x > 0$: **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.
exp est **convexe** sur $\mathbb{R}$: $(e^x)'' = e^x > 0$.

x	$-\infty$		$+\infty$
e^x		$+$	
$\exp(x)$	0^+	$\nearrow$	$+\infty$



Propriété | Conséquences de la stricte croissance

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:

- $\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b \iff a = b$ (injectivité)
- $\mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b \iff a < b$ (comparaison sans changement de sens)
- $\mathrm{e}^a \leqslant \mathrm{e}^b \iff a \leqslant b$

Autrement dit : on peut « passer à l'exponentielle » dans une égalité ou inégalité **sans changer le sens**.

Propriété | Convexité et inégalité fondamentale

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\mathrm{e}^x \geqslant x + 1}$$

avec égalité si et seulement si $x = 0$.

Démonstration

Posons $f(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$. $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$. $f'(x) = 0 \iff x = 0$. $f'(x) < 0$ pour $x < 0$, $f'(x) > 0$ pour $x > 0$: minimum en $x = 0$.
$f(0) = 1 - 0 - 1 = 0$. Donc $f(x) \geqslant 0$ pour tout x, i.e. $\mathrm{e}^x \geqslant x + 1$.
Interprétation géométrique : la courbe $y = \mathrm{e}^x$ (convexe) est toujours au-dessus de sa tangente en $(0, 1)$, qui est $y = x + 1$.

3.6 Limites de référence

Théorème | Limites fondamentales

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

L'axe des abscisses ($y = 0$) est **asymptote horizontale** en $-\infty$.

Démonstration

En $+\infty$: de $e^x \geqslant x+1$ (pour tout x), on déduit $e^x \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.
En $-\infty$: posons $t = -x \to +\infty$. $e^x = e^{-t} = \frac{1}{e^t} \to \frac{1}{+\infty} = 0$.

Propriété | Taux d'accroissement en 0

$$\boxed{\lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$$

C'est le taux d'accroissement de exp en 0 : $\frac{e^{0+h}-e^0}{h} = \frac{e^h-1}{h} \to \exp'(0) = e^0 = 1$.

Exemple | Utilisation du taux d'accroissement

$\lim_{x\to0} \frac{e^{3x}-1}{x} = \lim_{x\to0} 3\cdot\frac{e^{3x}-1}{3x} = 3\times1 = 3$.
En posant $u = 3x \to 0$: $\frac{e^u-1}{u} \to 1$, donc la limite est 3.

3.7 Croissances comparées

Théorème | Croissances comparées — le résultat fondamental

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty}$$

En $+\infty$, l'exponentielle **croît plus vite** que tout polynôme. On dit que e^x **domine** x^n.

Démonstration | Exigible au bac

Il suffit de montrer $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (le cas général s'en déduit).
De $e^x \geqslant x+1$, on déduit, pour $t \geqslant 0$: $e^t \geqslant 1+t$, donc $e^{t/2} \geqslant 1+\frac{t}{2}$, et en élevant au carré (tout est positif) :

$$e^t = (e^{t/2})^2 \geqslant \left(1+\frac{t}{2}\right)^2 \geqslant \frac{t^2}{4}$$

D'où $\frac{e^t}{t} \geqslant \frac{t}{4} \to +\infty$.

Propriété | Variantes des croissances comparées

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (e^x bat tout polynôme)
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (en $-\infty$ aussi)
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (équivalent au précédent)
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\alpha x}}{x^n} = +\infty$ pour tout $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$

Démonstration | De la variante 2

Posons $t = -x \to +\infty$. $x^n e^x = (-t)^n e^{-t} = (-1)^n \cdot \frac{t^n}{e^t}$. Or $\frac{t^n}{e^t} \to 0$ par la croissance comparée fondamentale. Donc $x^n e^x \to 0$.

Exemple | Applications des croissances comparées

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 - 3x)e^{-x} = 0$ (le e^{-x} écrase le polynôme).

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - x^3 = +\infty$ car $e^x - x^3 = x^3(\frac{e^x}{x^3} - 1)$ et $\frac{e^x}{x^3} \to +\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 e^x = 0$.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}}{x^{100}} = +\infty$ ($\alpha = 2$ bat tout n).

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x - x^2}{e^x + x} = \lim \dfrac{1 - x^2/e^x}{1 + x/e^x} = \dfrac{1-0}{1+0} = 1.$

Attention | Hiérarchie des croissances

En $+\infty$, du plus lent au plus rapide :

$$\underbrace{\ln x}_{\text{le plus lent}} \ll \underbrace{x^\alpha}_{\text{puissance}} \ll \underbrace{e^x}_{\text{exponentielle}} \ll \underbrace{e^{x^2}}_{\text{encore plus}}$$

« L'exponentielle gagne toujours. » C'est **la** règle à retenir pour les limites.

3.8 Dérivée de e^u

Propriété | Dérivée d'une composée

Si u est dérivable sur I, alors e^u est dérivable sur I et :

$$\boxed{(e^u)' = u' e^u}$$

Démonstration

Règle de la chaîne : $(e^{u(x)})' = \exp'(u(x)) \cdot u'(x) = e^{u(x)} \cdot u'(x)$.

« L'exponentielle est sa propre dérivée : la plus belle propriété de l'analyse. »

Exemple | Dérivées à connaître

- $(e^{3x})' = 3e^{3x}$
- $(e^{-x})' = -e^{-x}$
- $(e^{x^2})' = 2x\,e^{x^2}$
- $(e^{-x^2/2})' = -x\,e^{-x^2/2}$ (apparait en probabilités : loi normale)
- $(xe^x)' = (1+x)e^x$ (produit + chaîne)
- $(x^2e^{-x})' = (2x - x^2)e^{-x} = x(2-x)e^{-x}$

Propriété | Primitive de e^x

$\int e^x\,dx = e^x + C$.

Plus généralement : $\int u'(x)\,e^{u(x)}\,dx = e^{u(x)} + C$.

Retiens : quand tu vois $u'\,e^u$, c'est e^u.

3.9 Équations et inéquations avec l'exponentielle

Méthode | Trois stratégies

Stratégie 1 : se ramener à $e^A = e^B$. Utiliser l'injectivité : $e^A = e^B \iff A = B$.
Stratégie 2 : poser $X = e^x$. Transformer en équation polynomiale en X (avec $X > 0$).
Stratégie 3 : passer au ln. Si $e^{f(x)} = k$ avec $k > 0$, alors $f(x) = \ln k$. Si $k \leqslant 0$: pas de solution.

Exemple | Équations résolues

1. $e^{2x-1} = e^{x+3} \iff 2x - 1 = x + 3 \iff x = 4$.
2. $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$. Posons $X = e^x > 0$. $X^2 - 5X + 6 = 0$, $(X-2)(X-3) = 0$, $X = 2$ ou $X = 3$. Donc $x = \ln 2$ ou $x = \ln 3$.
3. $e^{2x} + e^x - 2 = 0$. $X = e^x > 0$. $X^2 + X - 2 = 0$, $(X+2)(X-1) = 0$. Seul $X = 1 > 0$: $x = \ln 1 = 0$.
4. $3e^x = 7 \iff e^x = \frac{7}{3} \iff x = \ln\frac{7}{3} = \ln 7 - \ln 3$.

Méthode | Inéquations

Comme exp est **strictement croissante** :

$$e^a \leqslant e^b \iff a \leqslant b$$

Pas de changement de sens. Et $e^x > 0$ toujours, donc on peut diviser par e^x sans changer le sens.

« L'exponentielle est sa propre dérivée : la plus belle propriété de l'analyse. »

Exemple | Inéquations résolues

1. $e^{2x-1} \geqslant e^3 \iff 2x-1 \geqslant 3 \iff x \geqslant 2$. $S = [2, +\infty[$.
2. $e^x \leqslant 5 \iff x \leqslant \ln 5$. $S =]-\infty, \ln 5]$.
3. $e^{2x} - 3e^x - 4 \leqslant 0$. $X = e^x > 0$. $X^2 - 3X - 4 \leqslant 0$, $(X-4)(X+1) \leqslant 0$, soit $-1 \leqslant X \leqslant 4$.
Comme $X > 0$: $0 < X \leqslant 4$, i.e. $e^x \leqslant 4$, $x \leqslant \ln 4 = 2\ln 2$. $S =]-\infty, 2\ln 2]$.

3.10 Fonctions a^x et exponentielle de base a

Définition | Exponentielle de base a

Pour $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{a^x = e^{x \ln a}}$$

En particulier : $2^x = e^{x\ln 2}$, $10^x = e^{x \ln 10}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^x = e^{-x\ln 2}$.

Propriété

$(a^x)' = \ln a \cdot a^x$. En particulier $(2^x)' = \ln 2 \cdot 2^x$.

Démonstration

$a^x = e^{x\ln a}$, donc $(a^x)' = \ln a \cdot e^{x\ln a} = \ln a \cdot a^x$.

Exemple

$2^x = 5 \iff e^{x\ln 2} = 5 \iff x\ln 2 = \ln 5 \iff x = \frac{\ln 5}{\ln 2} = \log_2 5 \approx 2{,}32$.
Temps de doublement : si $N(t) = N_0\, e^{kt}$, alors $N(t_d) = 2N_0 \iff t_d = \frac{\ln 2}{k}$.

3.11 Équations différentielles $y' = ay$

Théorème | Équation différentielle $y' = ay$

Les solutions de $y' = ay$ ($a \in \mathbb{R}$) sont les fonctions :

$$\boxed{y(x) = C\, e^{ax}} \quad \text{où } C \in \mathbb{R}$$

Avec condition initiale $y(0) = y_0$: unique solution $y(x) = y_0\, e^{ax}$.

Démonstration | Exigible au bac

Vérifions que $y(x) = Ce^{ax}$ est solution : $y'(x) = Cae^{ax} = a \cdot Ce^{ax} = ay(x)$.
Unicité : Soit y une solution. Posons $g(x) = y(x)e^{-ax}$.

$$g'(x) = y'(x)e^{-ax} + y(x)(-a)e^{-ax} = e^{-ax}(y'(x) - ay(x)) = 0$$

car $y' = ay$. Donc g est constante : $g(x) = g(0) = y(0) = C$. D'où $y(x) = Ce^{ax}$.

« L'exponentielle est sa propre dérivée : la plus belle propriété de l'analyse. »

Exemple | Applications

Radioactivité : $N'(t) = -\lambda N(t)$, $N(0) = N_0 \Rightarrow N(t) = N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$.
Demi-vie : $N(t_{1/2}) = \frac{N_0}{2} \iff t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$. Pour le carbone 14 : $t_{1/2} \approx 5730$ ans.
Refroidissement : $T'(t) = -k(T(t) - T_a)$, en posant $u = T - T_a$: $u' = -ku$, $u(t) = (T_0 - T_a)\mathrm{e}^{-kt}$.

Attention | Ne pas confondre $y' = ay$ et $y' = ay + b$

$y' = ay + b$ n'est **pas** au programme de Terminale (elle le sera en prépa). Mais la méthode est similaire : la solution est $y(x) = C\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$.

4 Boîte à outils — Réflexes pour le bac

Méthode | Les réflexes essentiels

1. $e^x > 0$ **toujours :** le signe d'une expression avec e^x dépend du **reste**, pas de e^x.
2. **Factoriser par** e^x **:** $f(x) = (ax+b)e^x \Rightarrow$ le signe de f est celui de $ax+b$.
3. **Croissances comparées :** en $+\infty$, e^x bat tout polynôme. En $-\infty$, $x^n e^x \to 0$.
4. **Poser** $X = e^x$ **:** dès que tu vois $e^{2x} = (e^x)^2$, pense changement de variable.
5. **Dériver** e^u **:** n'oublie pas le u' devant : $(e^u)' = u'e^u$.
6. **Primitiver** $u'e^u$ **:** c'est $e^u + C$.

Méthode | Mots-clés à repérer

Tu lis dans l'énoncé…	**Tu penses à…**
« résoudre $e^{f(x)} = e^{g(x)}$ »	$f(x) = g(x)$ (injectivité)
« $e^{2x} + \ldots e^x + \ldots = 0$ »	poser $X = e^x > 0$
« croissance/décroissance exponentielle »	$y' = ay$, $y = Ce^{ax}$
« demi-vie, temps de doublement »	$t = \frac{\ln 2}{\lambda}$
« $f(x) = P(x)\,e^{g(x)}$ »	dérivée produit + $(e^u)' = u'e^u$
« limite de $P(x)e^x$ »	croissances comparées
« tangente à la courbe de e^x »	$y = f'(a)(x-a) + f(a)$ avec $f'(a) = e^a$

Attention | Top 5 des erreurs au bac

1. **Écrire** $e^{a+b} = e^a + e^b$**.** C'est un **produit** : $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$.
2. **Dire que** e^x **peut être négatif ou nul.** Jamais : $e^x > 0$ pour tout x.
3. **Oublier** u' **dans** $(e^u)'$**.** $(e^{3x})' = 3e^{3x}$, pas e^{3x}.
4. **Confondre** e^{x^2} **et** $(e^x)^2 = e^{2x}$**.** Dessine l'arbre de la composition pour éviter.
5. **Oublier** $X > 0$ **en posant** $X = e^x$**.** On élimine les racines négatives.

« L'exponentielle est sa propre dérivée : la plus belle propriété de l'analyse. »

Méthode | Récapitulatif des formules

Résultat	Formule
Définition	$(e^x)' = e^x$, $e^0 = 1$ (unique solution de $f' = f$, $f(0) = 1$)
Relation fonctionnelle	$e^{a+b} = e^a \cdot e^b$
Dérivée composée	$(e^u)' = u'e^u$
Limites	$\lim_{-\infty} e^x = 0$, $\lim_{+\infty} e^x = +\infty$
Taux d'accroissement	$\frac{e^h - 1}{h} \to 1$ quand $h \to 0$
Croiss. comparée	$\frac{e^x}{x^n} \to +\infty$, $\quad x^n e^{-x} \to 0$ en $+\infty$
Inégalité fondamentale	$e^x \geqslant x + 1$ pour tout x
Éq. diff.	$y' = ay \Rightarrow y = Ce^{ax}$
Base a	$a^x = e^{x \ln a}$, $(a^x)' = \ln a \cdot a^x$

« L'exponentielle est sa propre dérivée : la plus belle propriété de l'analyse. »

5 Exercices

Exercice 1 ⭐☆☆ — Simplifications

Simplifier sans calculatrice :

a) $e^2 \cdot e^3$

b) $\dfrac{e^5}{e^2}$

c) $(e^{-1})^4$

d) $e^{\ln 7}$

e) $\sqrt{e^6}$

f) $e^{2\ln 3 + \ln 4}$

Exercice 2 ⭐☆☆ — Équations élémentaires

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $e^{3x-2} = 1$

b) $e^{x^2} = e^4$

c) $e^{2x} = 5$

d) $3e^x - 12 = 0$

Exercice 3 ⭐☆☆ — Inéquations élémentaires

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $e^{2x-1} > 1$

b) $e^{-x} \leqslant e^3$

c) $e^x < 7$

d) $e^{x^2} \geqslant e^9$

Exercice 4 ⭐⭐☆ — Équations avec changement de variable

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$

b) $e^{2x} + 3e^x - 10 = 0$

c) $2e^{2x} - 7e^x + 3 = 0$

d) $4^x - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$

Exercice 5 ⭐⭐☆ — Dérivées

Calculer la dérivée :

a) $f(x) = x^2 e^x$

b) $g(x) = (3x - 1)e^{-2x}$

c) $h(x) = e^{x^2 - 3x + 1}$

d) $k(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$ $\quad (x \neq -1)$

Exercice 6 ⭐⭐☆ — Limites

Calculer :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 2x)e^{-x}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 + 1)e^x$

« L'exponentielle est sa propre dérivée : la plus belle propriété de l'analyse. »

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x - x^2}{\mathrm{e}^x + 1}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{x}$

Exercice 7 ★★☆ — Étude de $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$

a) Déterminer les limites en $-\infty$ et $+\infty$.

b) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations complet.

c) Déterminer l'équation de la tangente en $x = 0$.

d) Montrer que l'équation $f(x) = k$ a exactement deux solutions si et seulement si $0 < k < \frac{1}{\mathrm{e}}$.

Exercice 8 ★★☆ — Étude de $f(x) = (1 - x)\mathrm{e}^x$

a) Limites en $\pm\infty$.

b) Dérivée, variations, maximum.

c) Position par rapport à l'axe des x.

d) Équation de la tangente au point d'inflexion.

Exercice 9 ★★☆ — Inégalité $\mathrm{e}^x \geqslant x + 1$

a) Démontrer que $\mathrm{e}^x \geqslant x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) En déduire que $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}$ pour $x \geqslant 0$.

Indication : étudier $g(x) = \mathrm{e}^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$ sur $[0, +\infty[$ en utilisant a).

c) Encadrer e en utilisant b) avec des valeurs de x.

Exercice 10 ★★☆ — Équation différentielle

a) Résoudre $y' = -3y$, $y(0) = 5$.

b) Résoudre $y' = 2y$, $y(1) = \mathrm{e}^2$.

c) Un médicament se dégrade selon $Q'(t) = -0{,}15\,Q(t)$, $Q(0) = 500\,\text{mg}$. Exprimer $Q(t)$, puis déterminer la demi-vie.

Exercice 11 ★★☆ — Primitives et intégrales

Calculer :

a) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$

d) Primitive de $f(x) = (2x + 1)\mathrm{e}^{x^2+x}$.

Exercice 12 ★★★ — Démonstrations de cours

a) Démontrer la relation fonctionnelle $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \cdot \mathrm{e}^b$.

b) Démontrer $\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

c) Démontrer que les solutions de $y' = ay$ sont $y = C\mathrm{e}^{ax}$.

« L'exponentielle est sa propre dérivée : la plus belle propriété de l'analyse. »

Exercice 13 ⭐⭐⭐ — Suite et exponentielle

$u_0 = 1$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \mathrm{e}^{-u_n})$.

a) Montrer que $u_n > 0$ pour tout n.

b) Montrer que (u_n) est décroissante.

c) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 14 ⭐⭐⭐ — Tangentes passant par l'origine

Déterminer toutes les tangentes à la courbe $y = \mathrm{e}^x$ passant par l'origine.

6 Problème — *L'exponentielle par les séries* ⭐⭐⭐

Problème style prépa

Ce problème construit l'exponentielle à partir de sa **série entière**, établit ses propriétés par cette voie et explore la convergence de suites liées à e.

On définit, pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$: $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$.

Partie A — Convergence

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \geqslant 2|x|$: $\left|\frac{x^k}{k!}\right| \leqslant \frac{1}{2^{k/2}}$.

   Indication : pour $k \geqslant 2|x|$, $\frac{|x|}{k} \leqslant \frac{1}{2}$.

2. En déduire que la série $\sum \frac{x^k}{k!}$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. On note $E(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$. Calculer $E(0)$ et $E(1)$.

Partie B — E vérifie $E' = E$

4. Calculer $S_n'(x)$ et montrer que $S_n'(x) = S_{n-1}(x)$.

5. *(Admis en terminale)* En déduire que $E'(x) = E(x)$.

6. Vérifier que $E(0) = 1$. Conclure que $E = \exp$.

Partie C — Relation fonctionnelle par les séries

7. **(Difficile)** En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que $S_n(a+b) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j} \frac{a^i\, b^{j-i}}{i!\,(j-i)!}$.

8. En déduire que $E(a+b) = E(a) \cdot E(b)$. Interpréter.

Partie D — Irrationalité de e

9. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$: $0 < \mathrm{e} - S_n(1) < \frac{1}{n!\cdot n}$.

   Indication : majorer $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ par une série géométrique.

10. Supposons $\mathrm{e} = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $q!\,\mathrm{e} - q!\,S_q(1)$ est un entier.

11. En déduire une contradiction en utilisant la question 9, et conclure que e est irrationnel.

« L'exponentielle est sa propre dérivée : la plus belle propriété de l'analyse. »

7 ✔✔ Corrigés détaillés

Exercice 1

a) $e^2 \cdot e^3 = e^{2+3} = e^5$.

b) $\frac{e^5}{e^2} = e^{5-2} = e^3$.

c) $(e^{-1})^4 = e^{-4}$.

d) $e^{\ln 7} = 7$ (car $e^{\ln x} = x$ pour $x > 0$).

e) $\sqrt{e^6} = e^{6/2} = e^3$.

f) $e^{2\ln 3 + \ln 4} = e^{\ln 3^2} \cdot e^{\ln 4} = 9 \times 4 = 36$.

Exercice 2

a) $e^{3x-2} = 1 = e^0 \iff 3x - 2 = 0 \iff x = \frac{2}{3}$.

b) $e^{x^2} = e^4 \iff x^2 = 4 \iff x = \pm 2$.

c) $e^{2x} = 5 \iff 2x = \ln 5 \iff x = \frac{\ln 5}{2}$.

d) $3e^x = 12 \iff e^x = 4 \iff x = \ln 4 = 2\ln 2$.

Exercice 3

a) $e^{2x-1} > 1 = e^0 \iff 2x - 1 > 0 \iff x > \frac{1}{2}$. $S = \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

b) $e^{-x} \leqslant e^3 \iff -x \leqslant 3 \iff x \geqslant -3$. $S = [-3, +\infty[$.

c) $e^x < 7 \iff x < \ln 7$. $S =]-\infty, \ln 7[$.

d) $e^{x^2} \geqslant e^9 \iff x^2 \geqslant 9 \iff |x| \geqslant 3 \iff x \leqslant -3$ ou $x \geqslant 3$. $S =]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$.

Exercice 4

a) $X = e^x > 0$. $X^2 - 5X + 4 = 0$, $(X-1)(X-4) = 0$, $X = 1$ ou $X = 4$. $x = 0$ ou $x = \ln 4 = 2\ln 2$.

b) $X^2 + 3X - 10 = 0$, $(X+5)(X-2) = 0$. Seul $X = 2 > 0$. $x = \ln 2$.

c) $2X^2 - 7X + 3 = 0$. $\Delta = 49 - 24 = 25$. $X = \frac{7 \pm 5}{4}$, soit $X = 3$ ou $X = \frac{1}{2}$. Les deux sont > 0. $x = \ln 3$ ou $x = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$.

d) $4^x = (2^2)^x = (2^x)^2$. Posons $Y = 2^x > 0$. $Y^2 - 3Y - 4 = 0$, $(Y-4)(Y+1) = 0$. Seul $Y = 4 > 0$. $2^x = 4 = 2^2$, $x = 2$.

Exercice 5

a) $f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = (2x + x^2)e^x = x(x+2)e^x$.

b) $g'(x) = 3e^{-2x} + (3x-1)(-2)e^{-2x} = (3 - 6x + 2)e^{-2x} = (5 - 6x)e^{-2x}$.

c) $u(x) = x^2 - 3x + 1$, $u'(x) = 2x - 3$. $h'(x) = (2x-3)e^{x^2-3x+1}$.

d) $k'(x) = \frac{e^x(x+1) - e^x \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x\,e^x}{(x+1)^2}$.

« L'exponentielle est sa propre dérivée : la plus belle propriété de l'analyse. »

Exercice 6

a) $\lim_{x\to+\infty}(x^3-2x)\mathrm{e}^{-x} = \lim \frac{x^3-2x}{\mathrm{e}^x} = 0$ (croissance comparée : e^x bat x^3).

b) $\lim_{x\to-\infty}(x^2+1)\mathrm{e}^x$. Posons $t=-x\to+\infty$: $(t^2+1)\mathrm{e}^{-t} = \frac{t^2+1}{\mathrm{e}^t} \to 0$.

c) $\frac{\mathrm{e}^x-x^2}{\mathrm{e}^x+1} = \frac{1-x^2/\mathrm{e}^x}{1+1/\mathrm{e}^x} \to \frac{1-0}{1+0} = 1$.

d) $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^x(1-\mathrm{e}^{-2x}) \to +\infty\cdot(1-0) = +\infty$.

e) $\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{x} = 2\cdot\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{2x}$. En posant $u=2x\to 0$: $\frac{\mathrm{e}^u-1}{u}\to 1$, donc la limite est **2**.

Exercice 7

$f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.

a) $\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{-x}$. Posons $t=-x\to+\infty$: $f = -t\mathrm{e}^t \to -\infty$ (car $t\mathrm{e}^t\to+\infty$).

$\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = \lim \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ (croissance comparée).

b) $f'(x) = \mathrm{e}^{-x} + x(-\mathrm{e}^{-x}) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$. Comme $\mathrm{e}^{-x}>0$: signe de f' = signe de $1-x$.

$f'(x)>0$ pour $x<1$, $f'(x)=0$ pour $x=1$, $f'(x)<0$ pour $x>1$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

Maximum : $f(1) = 1\cdot\mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}} \approx 0{,}368$.

c) $f(0)=0$, $f'(0) = (1-0)\mathrm{e}^0 = 1$. Tangente : $y=x$.

d) $f(x)=k$. D'après le tableau, f atteint le maximum $\frac{1}{\mathrm{e}}$.

Si $k>\frac{1}{\mathrm{e}}$: aucune solution (k au-dessus du max).

Si $k=\frac{1}{\mathrm{e}}$: exactement une solution ($x=1$).

Si $0<k<\frac{1}{\mathrm{e}}$: la droite $y=k$ coupe la courbe une fois sur $]-\infty,1[$ (croissante de $-\infty$ à $\frac{1}{\mathrm{e}}$) et une fois sur $]1,+\infty[$ (décroissante de $\frac{1}{\mathrm{e}}$ à 0). Total : **exactement 2 solutions**.

Si $k=0$: unique solution $x=0$.

Si $k<0$: unique solution (car f va de $-\infty$ à 0, croissante jusqu'à $x=1$).

Exercice 8

$f(x) = (1-x)\mathrm{e}^x$.

a) $\lim_{x\to+\infty}(1-x)\mathrm{e}^x$. On écrit $f(x) = \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x$. Or $\mathrm{e}^x\to+\infty$ et $x\mathrm{e}^x\to+\infty$: forme $+\infty-\infty$. Factorisons : $f(x) = \mathrm{e}^x(1-x)\to+\infty\cdot(-\infty) = -\infty$.

Plus rigoureusement : pour $x\geqslant 2$, $1-x\leqslant -1$ donc $f(x)\leqslant -\mathrm{e}^x\to-\infty$.

$\lim_{x\to-\infty}(1-x)\mathrm{e}^x$. $(1-x)\to+\infty$, $\mathrm{e}^x\to 0$. Forme $+\infty\cdot 0$. Écrivons $f(x) = \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x$, et $x\mathrm{e}^x\to 0$ (variante 2 des croissances comparées). Donc $f(x)\to 0-0=0$.

Asymptote $y=0$ en $-\infty$.

b) $f'(x) = -\mathrm{e}^x + (1-x)\mathrm{e}^x = (-1+1-x)\mathrm{e}^x = -x\mathrm{e}^x$. Signe de f' = signe de $-x$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Maximum : $f(0) = (1-0)\mathrm{e}^0 = 1$.

c) $f(x) = 0 \iff (1-x)\mathrm{e}^x = 0 \iff 1 - x = 0 \iff x = 1$ (car $\mathrm{e}^x \neq 0$). Pour $x < 1$: $f > 0$. Pour $x > 1$: $f < 0$.

d) $f''(x) = -\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x = -(1+x)\mathrm{e}^x$. $f''(x) = 0 \iff x = -1$.

Point d'inflexion en $(-1, f(-1)) = (-1, 2\mathrm{e}^{-1})$.

Tangente : $f'(-1) = -(-1)\mathrm{e}^{-1} = \mathrm{e}^{-1}$. $y = \mathrm{e}^{-1}(x+1) + 2\mathrm{e}^{-1} = \mathrm{e}^{-1}(x+3)$.

Exercice 9

a) $f(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$. $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$. $f'(x) = 0 \iff x = 0$. $f' < 0$ sur $]-\infty, 0[$, $f' > 0$ sur $]0, +\infty[$.

Minimum $f(0) = 0$. Donc $f(x) \geqslant 0$: $\mathrm{e}^x \geqslant x + 1$ pour tout x.

b) $g(x) = \mathrm{e}^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$ pour $x \geqslant 0$. $g'(x) = \mathrm{e}^x - 1 - x$.

Par a), $\mathrm{e}^x \geqslant x + 1$, donc $g'(x) = \mathrm{e}^x - 1 - x \geqslant (x+1) - 1 - x = 0$ pour tout x.

Ainsi $g' \geqslant 0$ sur $[0, +\infty[$: g est croissante. Comme $g(0) = 0$, on a $g(x) \geqslant 0$ pour $x \geqslant 0$.

D'où $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}$ pour tout $x \geqslant 0$.

c) $x = 1$: $\mathrm{e} \geqslant 1 + 1 + \frac{1}{2} = 2{,}5$. On sait aussi $\mathrm{e} < 3$.

On peut aller plus loin par le même raisonnement : en posant $h(x) = \mathrm{e}^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$, on montre $h'(x) = g(x) \geqslant 0$, etc. Pour $x = 1$: $\mathrm{e} \geqslant 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{8}{3} \approx 2{,}667$.

Avec un terme de plus : $\mathrm{e} \geqslant 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{65}{24} \approx 2{,}708$. Ceci converge vers $\mathrm{e} \approx 2{,}718$.

Exercice 10

a) $y' = -3y$, $y(0) = 5$. Solutions de $y' = -3y$: $y(x) = C\mathrm{e}^{-3x}$. $y(0) = C = 5$. Donc $y(x) = 5\mathrm{e}^{-3x}$.

b) Solutions de $y' = 2y$: $y(x) = C\mathrm{e}^{2x}$. $y(1) = C\mathrm{e}^2 = \mathrm{e}^2$, donc $C = 1$. $y(x) = \mathrm{e}^{2x}$.

c) $Q(t) = 500\,\mathrm{e}^{-0{,}15\,t}$ (mg).

Demi-vie : $Q(t_{1/2}) = 250 \iff \mathrm{e}^{-0{,}15\,t} = \frac{1}{2} \iff -0{,}15\,t = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 \iff t = \frac{\ln 2}{0{,}15} \approx 4{,}62$ h.

Exercice 11

a) $\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right]_0^1 = \frac{\mathrm{e}^2 - 1}{2}$.

b) $\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} = \frac{u'}{u}$ avec $u = \mathrm{e}^x + 1$. $\int_0^{\ln 2} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x = \left[\ln(\mathrm{e}^x+1)\right]_0^{\ln 2} = \ln(2+1) - \ln(1+1) = \ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3}{2}$.

c) $x\mathrm{e}^{x^2} = \frac{1}{2}\cdot 2x\,\mathrm{e}^{x^2} = \frac{1}{2}u'\mathrm{e}^u$ avec $u = x^2$. $\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}[\mathrm{e}^{x^2}]_0^1 = \frac{\mathrm{e}-1}{2}$.

d) $u(x) = x^2 + x$, $u'(x) = 2x + 1$. $(2x+1)\mathrm{e}^{x^2+x} = u'\mathrm{e}^u$. Primitive : $F(x) = \mathrm{e}^{x^2+x} + C$.

Exercice 12

a) Fixons $a \in \mathbb{R}$. Posons $g(x) = \mathrm{e}^{a+x} \cdot \mathrm{e}^{-x}$.

$g'(x) = \mathrm{e}^{a+x} \cdot \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{a+x} \cdot (-\mathrm{e}^{-x}) = 0$.

g constante : $g(x) = g(0) = \mathrm{e}^{a} \cdot 1 = \mathrm{e}^{a}$. Pour $x = b$: $\mathrm{e}^{a+b} \cdot \mathrm{e}^{-b} = \mathrm{e}^{a}$, d'où $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^{a} \cdot \mathrm{e}^{b}$.

b) De $\mathrm{e}^{x} \geqslant x+1$, pour $t \geqslant 0$: $\mathrm{e}^{t/2} \geqslant 1 + \frac{t}{2} \geqslant \frac{t}{2}$, donc $\mathrm{e}^{t} = (\mathrm{e}^{t/2})^2 \geqslant \frac{t^2}{4}$.

Ainsi $\frac{\mathrm{e}^{x}}{x} = \frac{\mathrm{e}^{x}}{x} \geqslant \frac{x}{4}$ pour $x > 0$, et $\frac{x}{4} \to +\infty$. D'où $\frac{\mathrm{e}^{x}}{x} \to +\infty$.

c) Soit y solution de $y' = ay$. Posons $g(x) = y(x)\mathrm{e}^{-ax}$.

$g'(x) = y'(x)\mathrm{e}^{-ax} + y(x)(-a\mathrm{e}^{-ax}) = \mathrm{e}^{-ax}(y'(x) - ay(x)) = 0$ car $y' = ay$.

g constante : $g(x) = C$. Donc $y(x) = C\mathrm{e}^{ax}$. Réciproquement, $y = C\mathrm{e}^{ax}$ vérifie $y' = aC\mathrm{e}^{ax} = ay$.

Exercice 13

$f(x) = \frac{1}{2}(x + \mathrm{e}^{-x})$, $u_0 = 1$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Si $u_n > 0$: $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \mathrm{e}^{-u_n}) > \frac{1}{2}(0 + \mathrm{e}^{-u_n}) > 0$ (car $\mathrm{e}^{-u_n} > 0$). Par récurrence : $u_n > 0$ pour tout n.

b) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n + \mathrm{e}^{-u_n}) - u_n = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-u_n} - u_n)$.

Posons $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-x} - x$. $\varphi'(x) = -\mathrm{e}^{-x} - 1 < 0$: φ strictement décroissante. $\varphi(0) = 1 > 0$, $\varphi(1) = \mathrm{e}^{-1} - 1 \approx -0{,}63 < 0$. Par le TVI : φ s'annule en un unique $\alpha \in]0,1[$.

Pour $x > \alpha$: $\varphi(x) < 0$, donc $\mathrm{e}^{-x} < x$.

Or $u_0 = 1 > \alpha$ et on peut montrer par récurrence que $u_n > \alpha$ pour tout n (car $f(\alpha) = \frac{1}{2}(\alpha + \mathrm{e}^{-\alpha}) = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha) = \alpha$ et f est croissante au voisinage de α). Donc $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\varphi(u_n) < 0$: (u_n) décroissante.

c) (u_n) décroissante et minorée par $\alpha > 0$, donc converge vers $\ell \geqslant \alpha$. Par continuité de f : $\ell = f(\ell) = \frac{1}{2}(\ell + \mathrm{e}^{-\ell})$, soit $\ell = \mathrm{e}^{-\ell}$, i.e. $\ell\mathrm{e}^{\ell} = 1$. C'est l'unique point fixe $\alpha \approx 0{,}567$ (constante Ω de Lambert).

Exercice 14

On cherche les tangentes à $y = \mathrm{e}^{x}$ passant par $O(0,0)$.

La tangente en $x = a$: $y = \mathrm{e}^{a}(x - a) + \mathrm{e}^{a} = \mathrm{e}^{a}(x - a + 1)$.

Passage par O : $0 = \mathrm{e}^{a}(0 - a + 1)$. Comme $\mathrm{e}^{a} \neq 0$: $-a + 1 = 0$, soit $a = 1$.

Unique tangente : $y = \mathrm{e}(x - 1 + 1) = \mathrm{e}x$.

Vérification : la droite $y = \mathrm{e}x$ est bien tangente en $(1, \mathrm{e})$ avec pente $\mathrm{e}^{1} = \mathrm{e}$.

Corrigé du problème

Partie A — Convergence

1. Pour $k \geqslant 2|x|$: $\frac{|x|}{k} \leqslant \frac{|x|}{2|x|} = \frac{1}{2}$.

$\left|\frac{x^k}{k!}\right| = \frac{|x|^k}{k!}$. Écrivons $k! = 1 \cdot 2 \cdots k$. Pour les facteurs $j \geqslant 2|x|$: $\frac{|x|}{j} \leqslant \frac{1}{2}$. Il y a au moins $k - \lfloor 2|x| \rfloor$ tels facteurs. Pour k assez grand (disons $k \geqslant N = \lceil 2|x| \rceil$) :

$$\frac{|x|^k}{k!} = \frac{|x|^N}{N!} \cdot \prod_{j=N+1}^{k} \frac{|x|}{j} \leqslant \frac{|x|^N}{N!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-N}$$

« L'exponentielle est sa propre dérivée : la plus belle propriété de l'analyse. »

Comme $\frac{|x|^N}{N!}$ est une constante et $(\frac{1}{2})^{k-N} \to 0$, le terme général tend vers 0. Plus précisément, $|\frac{x^k}{k!}| \leqslant M \cdot 2^{-k}$ pour une constante M, d'où la majoration demandée (quitte à ajuster).

2. Comme $\sum \frac{1}{2^{k/2}} = \sum(\frac{1}{\sqrt{2}})^k$ est une série géométrique convergente (raison $\frac{1}{\sqrt{2}} < 1$), par comparaison la série $\sum \frac{x^k}{k!}$ converge absolument.

3. $E(0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{0^k}{k!} = 1$ (tous les termes sont nuls sauf $k = 0$).

$E(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots \approx 2{,}71828 = \mathrm{e}$.

Partie B — E vérifie $E' = E$

4. $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$, donc $S_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$. En reindexant $j = k - 1$: $S_n'(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^j}{j!} = S_{n-1}(x)$.

5. (Admis) En passant à la limite : $E'(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n'(x) = \lim_{n\to+\infty} S_{n-1}(x) = E(x)$.

6. $E(0) = 1$ et $E' = E$. Par l'unicité du théorème fondamental : $E = \exp$.

Partie C — Relation fonctionnelle

7. Par le binôme de Newton : $(a+b)^j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} a^i b^{j-i}$. Donc :

$$\frac{(a+b)^j}{j!} = \sum_{i=0}^{j} \frac{1}{j!}\binom{j}{i} a^i b^{j-i} = \sum_{i=0}^{j} \frac{a^i}{i!} \cdot \frac{b^{j-i}}{(j-i)!}$$

car $\frac{1}{j!}\binom{j}{i} = \frac{1}{i!(j-i)!}$. En sommant pour $j = 0, \ldots, n$:

$$S_n(a+b) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j} \frac{a^i}{i!} \cdot \frac{b^{j-i}}{(j-i)!}$$

8. Quand $n \to +\infty$, cette double somme converge vers $(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{a^i}{i!}) \cdot (\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{b^m}{m!}) = E(a) \cdot E(b)$ (produit de Cauchy de séries absolument convergentes).

Conclusion : $E(a+b) = E(a) \cdot E(b)$, ce qui redonne la relation fonctionnelle $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \cdot \mathrm{e}^b$.

Partie D — Irrationalité de e

9. $\mathrm{e} - S_n(1) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$. Pour $k \geqslant n+1$:

$$\frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{(n+2)(n+3)\cdots k} \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{(n+1)^{k-n-1}}$$

(car chaque facteur au dénominateur est $\geqslant n+1$). En sommant :

$$\mathrm{e} - S_n(1) \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^j} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n! \cdot n}$$

(série géométrique de raison $\frac{1}{n+1}$). Et $\mathrm{e} - S_n(1) > 0$ car tous les termes sont positifs.

10. Si $\mathrm{e} = \frac{p}{q}$, posons $N = q!\,\mathrm{e} - q!\,S_q(1) = q!(\frac{p}{q} - S_q(1))$.

$q!\,S_q(1) = q! \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!}$. Chaque terme $\frac{q!}{k!}$ est un entier (car $k \leqslant q$). Donc $q!\,S_q(1) \in \mathbb{N}$.

$q!\,\mathrm{e} = q! \cdot \frac{p}{q} = (q-1)! \cdot p \in \mathbb{N}$. Donc $N = q!\,\mathrm{e} - q!\,S_q(1)$ est un entier.

« L'exponentielle est sa propre dérivée : la plus belle propriété de l'analyse. »

11. Par la question 9 avec $n = q$: $0 < \mathrm{e} - S_q(1) < \frac{1}{q! \cdot q}$, donc $0 < q!(\mathrm{e} - S_q(1)) < \frac{1}{q}$.

Ainsi $0 < N < \frac{1}{q} \leqslant 1$. Mais N est un entier positif : $N \geqslant 1$, ce qui contredit $N < 1$.

Conclusion : e est **irrationnel**.

Fin de la Fiche 10 — Fonction exponentielle

Tu maîtrises maintenant la définition ($f' = f$, $f(0) = 1$), la relation fonctionnelle, les limites, les croissances comparées, la dérivée de e^u, les équations différentielles $y' = ay$, et les équations avec changement de variable.

Le logarithme népérien, réciproque de l'exponentielle, est l'objet de la fiche suivante.

→ **Fiche 11 : Fonction logarithme népérien.**

« L'exponentielle est sa propre dérivée : la plus belle propriété de l'analyse. »